

Travail demandé

à rendre le 15/11/2024

Chaque étudiant rend une copie même s'il n'est pas interdit de chercher les exercices en groupe.

**Problème I - Supports : adhérence ou pas ?**

Ce sujet est un extrait du sujet CCINP MP 2020.

**Partie I - Lois de Coulomb relatives au glissement**

On rappelle ci-dessous les lois de Coulomb, en notant  $f_s$  et  $f_g$  les coefficients statiques et dynamiques du frottement et  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  les composantes tangentielle et normale de la réaction.

- En mode statique (absence de glissement donc adhérence), la norme de la composante tangentielle  $\|\vec{T}\|$  est inférieure à la quantité  $f_s \|\vec{N}\|$  dans laquelle  $\|\vec{N}\|$  représente la norme de la composante normale  $\vec{N}$  de la réaction :  $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$ .
- En mode dynamique (présence de glissement), on a alors l'égalité  $\|\vec{T}\| = f_g \|\vec{N}\|$  avec une composante tangentielle toujours opposée à la vitesse de glissement :  $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$  et  $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = 0$ .

- Q1.** a) Définir ce qu'on appelle la vitesse de glissement  $\vec{v}_g$  d'un solide par rapport à un autre en un point de contact.  
 b) Doit-on préciser dans quel référentiel elle est exprimée ?
- Q2.** Expliquer à quelle condition on passe de l'adhérence au glissement.
- Q3.** Expliquer à quelle condition on passe du glissement à l'adhérence.

**Partie II - Mesure du coefficient de frottement dynamique**

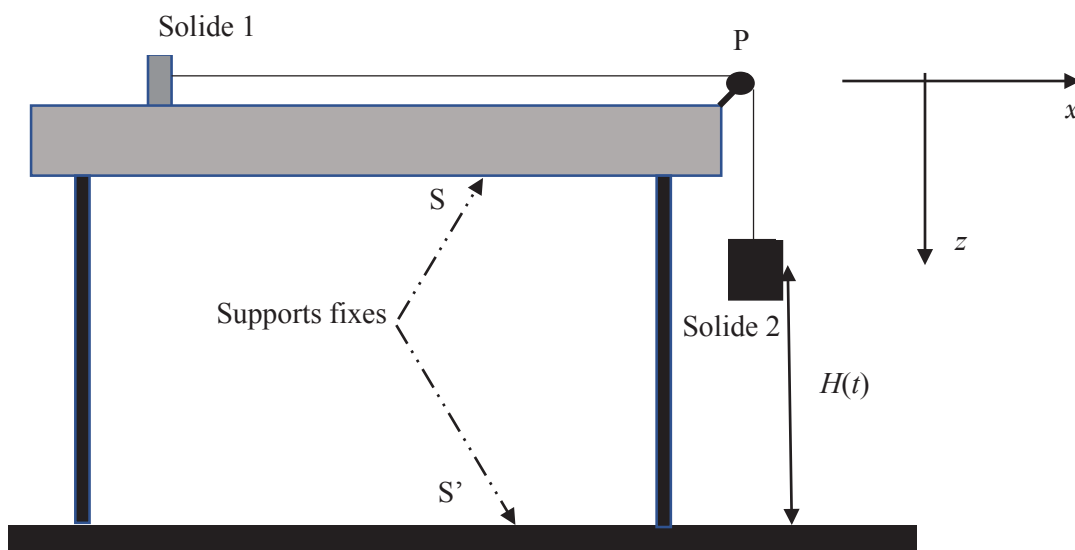
On utilise le dispositif représenté sur la **figure 1**. Un solide 1 de masse  $M$  est lié, par un fil inextensible et supposé sans masse, à un solide 2 de masse  $\alpha M$  ( $\alpha > 1 > f_s$ ). Le fil sans masse de longueur  $L$  passe sur la gorge d'une poulie idéale. Le solide 1 se déplace sur un support fixe S horizontal. On appelle  $H$  l'altitude du centre de masse du solide 2 au-dessus d'un support horizontal S'.

À l'état initial, les solides sont tous immobiles, le solide 1 est à l'abscisse  $X(t=0) = X_0$  et le solide 2 est à l'altitude  $H(t=0) = H_0$ .

On veut dans cette expérience déterminer la valeur du coefficient  $f_g$  de frottement relatif au glissement entre le matériau constitutif de S et celui du solide 1. On mesure la distance  $D$  parcourue par le solide 1 sur le support S, sachant que le solide 2 touche S'avant que le solide 1 ne s'arrête.

**Consignes** : on note  $g$  l'accélération de la pesanteur. On notera systématiquement  $T$  et  $N$  les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction du support S sur le solide 1 (**figure 1**), avec  $f_g$  le coefficient de frottement dynamique. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

- Q4.** Décrire qualitativement les deux phases successives du mouvement de l'ensemble en précisant pour chacune d'elles si le fil est tendu ou non tendu.
- Q5.** La nature « idéale » de la poulie et du fil permet de considérer que la norme  $F$  de la tension du fil est conservée tout le long du fil. En appliquant le théorème de la résultante cinétique au solide 1 et au solide 2, écrire les 3 relations qui lient  $N$ ,  $T$ ,  $F$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $M$ , l'accélération horizontale  $\ddot{X}$  du solide 1 et l'accélération verticale  $\ddot{Z}$  du solide 2.
- Q6.** Traduire la loi de Coulomb pour exprimer  $\vec{T}$ .
- Q7.** On s'intéresse à la première phase du mouvement.
- Exprimer le lien entre  $\ddot{X}$  et  $\ddot{Z}$  en le justifiant dans cette première phase.
  - Établir dans cette phase la vitesse  $\dot{X}(t)$  en fonction de  $\alpha$ ,  $f_g$  et  $g$ .
  - Quelle est la durée  $t_1$  de cette première phase ?
  - Quelle est la vitesse correspondante atteinte  $V_1$  ?
- Q8.** On s'intéresse à la deuxième phase du mouvement.
- Exprimer  $X(t)$  dans cette phase en fonction de  $t$ ,  $t_1$ ,  $V_1$ ,  $X_0$ ,  $H_0$ ,  $g$  et  $f_g$ .
  - Exprimer  $f_g$  en fonction de  $\alpha$ ,  $H_0$  et  $D$ .
- Q9.** Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chacune des deux phases du mouvement.

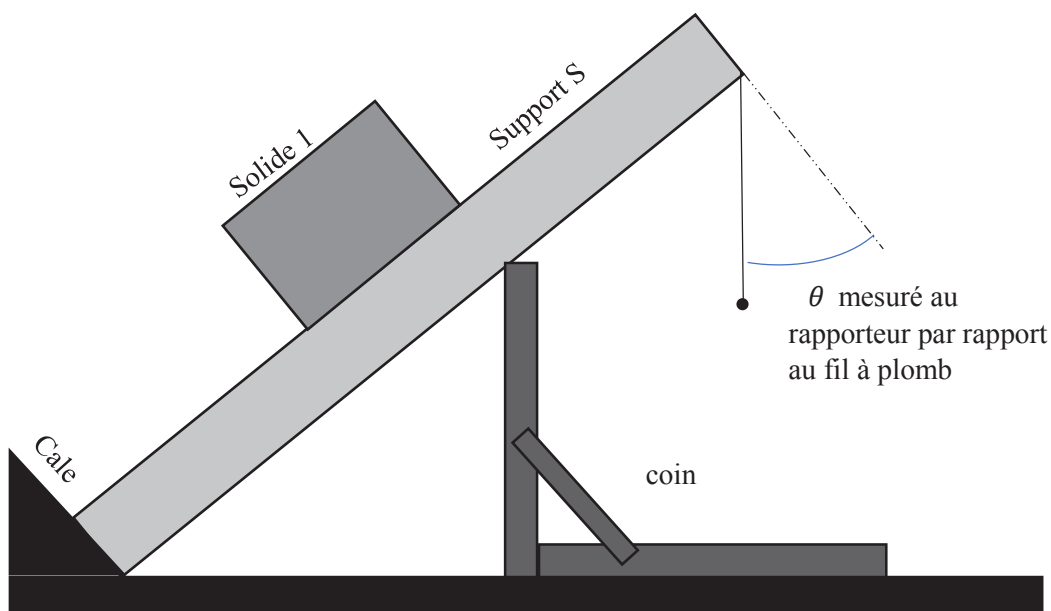


**Figure 1** - Premier dispositif : mesure du coefficient de frottement dynamique.

- Q10.** On réalise l'expérience plusieurs fois de suite, en partant toujours de la valeur de  $H_0 = 40,0$  cm. La masse du solide 1 vaut  $M = 50$  g et celle du solide 2 vaut  $\alpha M = 60$  g. Calculer la valeur du coefficient de frottement  $f_g$  sachant qu'on a trouvé une valeur moyenne de la distance  $D$  égale à  $\langle D \rangle = 1,50$  m.

### Partie III - Mesure du coefficient de frottement statique

- Q11.** On pose maintenant le solide 1 sur le support S qui fait un angle  $\theta$  avec le plan horizontal. Le dispositif est représenté sur la **figure 2**. On fait augmenter, à partir d'une valeur faible, l'angle  $\theta$  en déplaçant lentement un coin et on mesure pour quelle valeur  $\theta = \theta_{lim}$  le solide 1 se met à glisser. Montrer que cette expérience permet de mesurer le coefficient de frottement  $f_s$ .



**Figure 2** - Second dispositif : mesure du coefficient de frottement statique.

- Q12.** On réalise plusieurs essais successifs de décrochement et la valeur moyenne de  $\theta_{lim}$  est de l'ordre de  $29,5^\circ$ . En déduire l'ordre de grandeur du coefficient de frottement mesuré.

### Partie IV - Phénomène de « slip-stick »

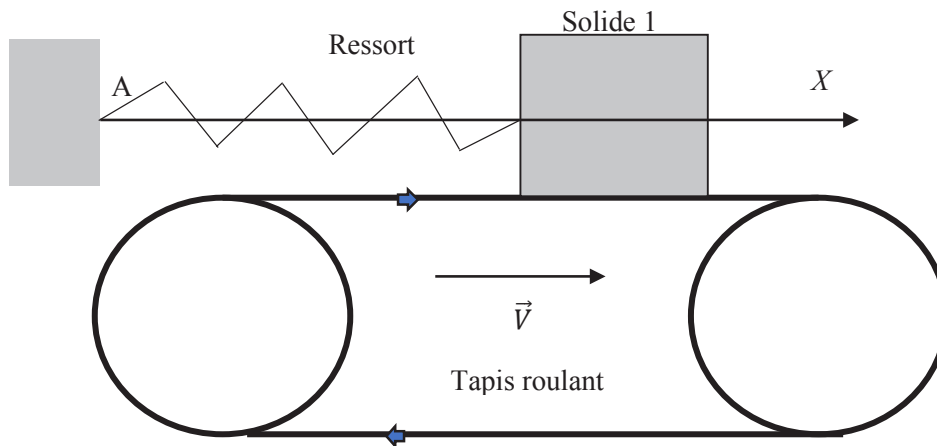
**Données :** accélération de la pesanteur  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Le domaine des ondes sonores, perceptibles par l'oreille humaine, va d'une fréquence de 20 Hz à une fréquence de 20 kHz. Une grande fréquence correspond à un son aigu.

**Consignes :** on notera systématiquement  $N$  et  $T$  les normes des composantes normale et tangentielle de la réaction d'un support. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

Le phénomène « slip-stick » (littéralement glisser-coller) intervient quand les coefficients de frottement statique et dynamique ont des valeurs très différentes. Il s'agit d'un mouvement saccadé qui contient des phases de glissement et d'adhérence successives dont on décrit ci-dessous une modélisation.

Le solide 1 de masse  $M = 50 \text{ mg}$  est relié par un ressort de raideur  $k$  à un point fixe A. Il se déplace sur un tapis roulant horizontal caractérisé par un coefficient de frottement dynamique nul et par un coefficient statique  $f_s = 0,6$ . La situation est représentée **figure 3**. On note  $X(t)$  l'allongement instantané du ressort. Dans la situation initiale,  $X(t = 0) = X_0 > 0$  et le solide 1 est abandonné sans vitesse initiale relativement au tapis. Celui-ci se déplace à la vitesse uniforme  $\vec{V} = V\vec{e}_X$ .



**Figure 3** - Modélisation du « slip-stick »

**Q13.** Établir les expressions :

a) de l'allongement  $X_1$

b) de la date  $t_1$

associés au début de glissement du solide 1 par rapport au tapis.

**Q14. a)** Quelle est la nature du mouvement après la date  $t_1$  ?

b) Déterminer par une méthode énergétique l'allongement maximal  $X_M$  atteint par la masse en fonction de  $X_1$ ,  $V$  et la pulsation propre de l'oscillateur  $\omega_0$ .

**Q15. a)** Déterminer les fonctions allongement  $X(t)$  et vitesse  $\dot{X}(t)$  pendant la phase de glissement.

b) Pour quelle valeur de  $\dot{X}(t = t_2)$ , cette phase s'arrête-t-elle ?

c) Représenter l'allure de  $X(t)$  et de  $\dot{X}(t)$  entre  $t = 0$  et  $t = t_1 + t_2$ .

**Q16.** À quelle condition d'inégalité entre la période propre  $\tau_0$  et  $\frac{X_1}{V}$  peut-on considérer que

l'abscisse maximale  $X_M$  est très voisine de  $X_1$  ?

On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite de cette partie.

**Q17.** Montrer qu'alors la fréquence approchée du mouvement est donnée par :  $\nu = \frac{\omega_0^2 V}{2gf_s}$ .

Évaluer numériquement cette fréquence en supposant que la raideur vaut  $k = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$  et que la vitesse du tapis roulant vaut  $V = 6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q18.** Représenter l'allure de  $X(t)$  sur une période.

**Q19.** Ce phénomène se retrouve dans beaucoup de situations quotidiennes : craie qui crisse sur un tableau, porte qui grince, pneu qui crisse et archet de violon.

**a)** Dans quel domaine de fréquences sont donc ces mouvements de « slip-stick » ?

**b)** Pourquoi en cassant la craie supprime-t-on ce crissement, sachant que la raideur  $k$  d'un bâton est inversement proportionnelle au cube de sa longueur ?

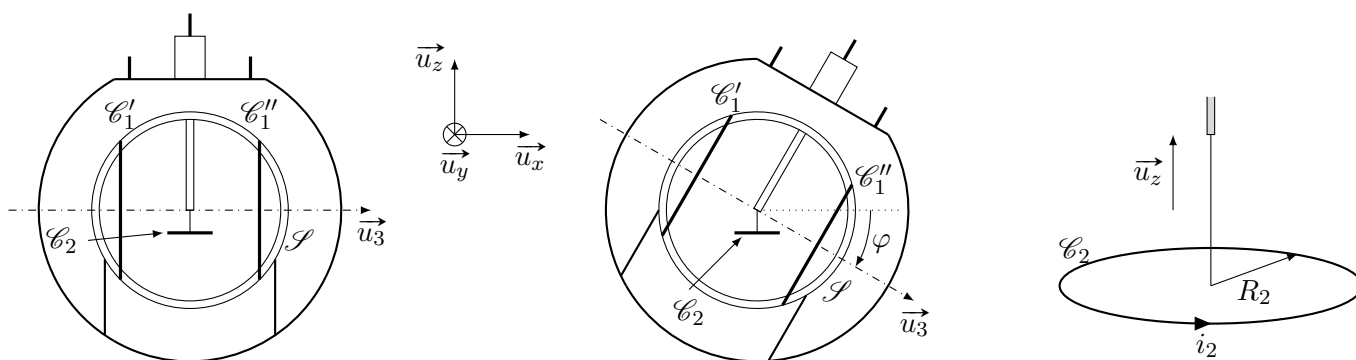
**Q20.** Évaluer le travail des forces de frottement sur une période dans ce modèle. Commenter.

## Problème II - Mesure de l'inclinaison de la bouée Waverider

Ce sujet est extrait du concours CCS MP 2022.

Afin de déterminer la direction des vagues, certains Waveriders sont équipés de deux autres accéléromètres, non pas placés sur la plateforme comme le premier, mais *rigidement liés à la bouée*. Lorsque la bouée s'incline sous l'effet de la houle, ces accéléromètres s'inclinent donc aussi. Afin de projeter dans le plan horizontal et sur l'axe vertical les accélérations qu'ils mesurent, il faut déterminer leur orientation relativement à la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  définie par la plateforme et son fil de suspension vertical. La mesure de deux angles est pour cela nécessaire, mais nous nous limitons ici au seul angle  $\varphi$  (figure 1). La mesure de  $\varphi$  s'appuie sur un effet de couplage électromagnétique dans un système de bobines.

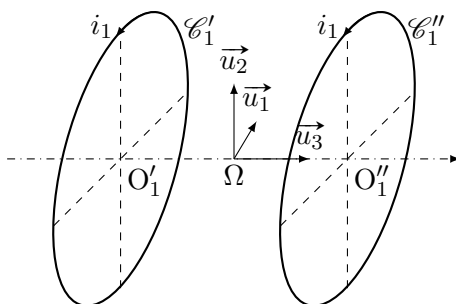
- ▷ Une paire de bobines plates  $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{C}_1', \mathcal{C}_1''\}$  est collée à la paroi extérieure de la sphère  $\mathcal{S}$ . Leur axe de révolution commun est dirigé par le vecteur unitaire  $\vec{u}_3$ .
- ▷ Une bobine-sonde  $\mathcal{C}_2$  est fixée sur la plateforme de manière que son axe de symétrie soit confondu avec le fil de suspension vertical.



**Fig. 1** – La bouée, la sphère  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{C}_1'$  et  $\mathcal{C}_1''$  s'inclinent alors que  $\mathcal{C}_2$  se maintient horizontale et le fil de suspension vertical. À droite : vue agrandie en trois dimensions de la bobine-sonde  $\mathcal{C}_2$ .

### II.1. Champ magnétique produit par des bobines de Helmholtz

Les deux bobines plates identiques  $\mathcal{C}_1'$  et  $\mathcal{C}_1''$  sont placées dans la configuration dite « de Helmholtz » : assimilables à deux cercles de centres  $O_1'$  et  $O_1''$ , elles possèdent le même axe de révolution, sont formées chacune de  $N_1$  spires parcourues par un courant d'intensité  $i_1$  et sont séparées d'une distance égale à leur rayon  $R_1$  (figure 2). Les vecteurs  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  forment une base orthonormée directe.



**Fig. 2** – Bobines de Helmholtz.

Ce dispositif est réputé produire un champ magnétique presque uniforme dans une région relativement étendue autour du milieu  $\Omega$  de  $[O_1'O_1'']$ . Afin de préciser la justesse de cette affirmation, un calcul numérique du champ magnétique a été conduit avec les paramètres  $R_1 = 20$  cm,  $N_1 i_1 = 1$  A. Ses résultats sont fournis sur les figures 3 (page 9) et 4 (page 10). Avant de les exploiter, on s'assure de sa compatibilité avec les lois de l'électromagnétisme.

En plus des coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$  d'origine  $\Omega$ , on utilise des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $(\Omega, \vec{u}_3)$ . On voit que  $x_3$  joue le rôle de la coordonnée usuellement notée  $z$ , mais on prendra garde à ne pas confondre  $\vec{u}_3$  et  $\vec{u}_z$  (figure 1). Dans le plan de la figure 3, défini par  $\theta = 0$ ,  $r$  se confond avec  $|x_1|$  et le vecteur unitaire d'habitude noté  $\vec{u}_r$  vaut  $\pm \vec{u}_1$  selon le signe de  $x_1$ . On note  $B_3(r, x_3) = \vec{B}(r, x_3) \cdot \vec{u}_3$ ,  $B_{\text{axe}}(x_3) = \vec{B}(0, x_3) \cdot \vec{u}_3$ ,  $B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r$  et  $B_1 = \vec{B} \cdot \vec{u}_1$ .

La plupart des questions de cette sous-partie demandent un travail sur les figures 3 et 4 (à rendre avec la copie). On fera clairement apparaître les constructions graphiques qui concourent au raisonnement. Leur lisibilité et la clarté de leur utilisation feront partie des critères de notation de l'épreuve.

**II.1.** Comme il est difficile de représenter le champ magnétique en trois dimensions, la figure 3 se limite au plan  $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_3)$ . Pourquoi cela ne constitue-t-il pas une perte d'information ? En quels points de ce plan la direction du champ était-elle prévisible, et par quels arguments ? Sur le document réponse, représenter par une flèche le champ magnétique en quelques-uns de ces points.

**II.2.** Quelle équation de Maxwell exprime la conservation du flux de  $\vec{B}$  ? En quoi cette propriété s'illustre-t-elle sur la carte fournie ? En utilisant les figures 3 et 4, vous apporterez une réponse quantitative avec au moins deux valeurs numériques du champ à l'appui.

On s'intéresse à la ligne de champ  $\mathcal{C}$  passant par les points D et E. De l'un à l'autre, elle traverse sur une longueur d'environ 12 cm une zone de champ très intense. Ailleurs au contraire, le champ paraît beaucoup plus faible.

**II.3.** Les valeurs du champ observées le long de  $\mathcal{C}$  sont-elles compatibles avec l'intensité circulant dans les bobines ?

Deux constatations se dégagent des figures 3 et 4 :

- ▷ dans la région située entre les bobines, le champ reste presque colinéaire à  $\vec{u}_3$  si on ne s'éloigne pas trop de l'axe ;
- ▷  $B_{\text{axe}}$  est presque uniforme dans la région délimitée par les bobines.

On se propose d'établir un lien entre ces deux observations.

**II.4.** Considérons à titre d'exemple le point A ( $x_{1A} = 5$  cm,  $x_{3A} = 20$  cm), près duquel la ligne de champ est légèrement inclinée. Que valent  $B_3(A)$  et  $B_r(A)$  ? Ces valeurs sont-elles cohérentes avec l'inclinaison de la ligne de champ en A ? Une application numérique est attendue.

**II.5.** En utilisant, au voisinage d'un point de l'axe (coordonnées  $(r, x_3)$  avec  $r \ll R_1$ ), l'équation de Maxwell de la 2, démontrer que

$$B_r(r, x_3) \approx -\frac{r}{2} \frac{dB_{\text{axe}}}{dx_3}$$

**II.6.** Cette relation est-elle satisfaite en A ?

**II.7.** À partir des graphiques fournis, déterminer le facteur  $\mu$  tel que

$$B_{\text{axe}}(0) = \mu N_1 i_1$$

Conventionnellement, on considère que le champ est quasi-uniforme dans le cylindre de rayon  $r_{\text{max}}$  défini par les inégalités suivantes :

$$-\frac{R_1}{4} \leq x_3 \leq \frac{R_1}{4} \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq r_{\text{max}} \quad \text{avec} \quad \left| B_3\left(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4}\right) - B_{\text{axe}}(0) \right| = \frac{1}{10} B_{\text{axe}}(0)$$

**II.8.** Déterminer  $r_{\text{max}}$  et représenter ce cylindre sur la figure D.

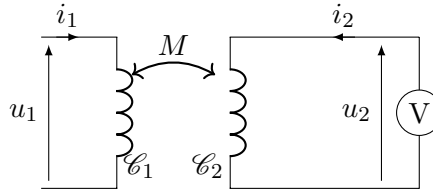
## II.2. Exploitation du couplage électromagnétique

La bobine-sonde  $\mathcal{C}_2$  présente un rayon  $R_2$  et une inductance propre  $L_2$ . Elle est formée de  $N_2$  spires de cuivre, chacune parcourue par un courant d'intensité  $i_2$ , enroulées dans le sens de rotation positif par rapport à  $\vec{u}_z$ .

On suppose qu'elle reste entièrement dans la région où le champ créé par  $\mathcal{C}_1$  est quasi-uniforme. On note  $L_1$  l'inductance propre de  $\mathcal{C}_1$  et on néglige les résistances de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

**II.9.** Rappeler la définition du coefficient de mutuelle induction  $M$  entre  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . L'exprimer en fonction de  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $R_2$ ,  $\mu$  et  $\varphi$ .

On applique une tension alternative  $u_1 = U_{1m} \cos(\omega t)$  aux bornes de  $\mathcal{C}_1$ . La bobine  $\mathcal{C}_2$  est connectée à un voltmètre de très grande impédance d'entrée.



**II.10.** Écrire les équations électriques régissant le fonctionnement de ces deux circuits, sans tenir compte, à ce stade, de la « très grande impédance » du voltmètre.

**II.11.** À quelle simplification peut-on procéder en tenant compte de la « très grande impédance » du voltmètre ? En déduire une relation entre  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $L_1$  et  $M$ .

**II.12.** Application numérique :  $U_{1m} = 5.00 \text{ V}$ ,  $U_{2m} = 170 \text{ mV}$ ,  $L_1 = 3.6 \text{ mH}$ ,  $R_2 = 5.0 \text{ cm}$ ,  $N_1 = 50$ ,  $N_2 = 200$ . Calculer le coefficient de mutuelle induction  $M$  (en valeur absolue) et l'angle d'inclinaison  $\varphi$  (supposé positif) en degré.

### Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

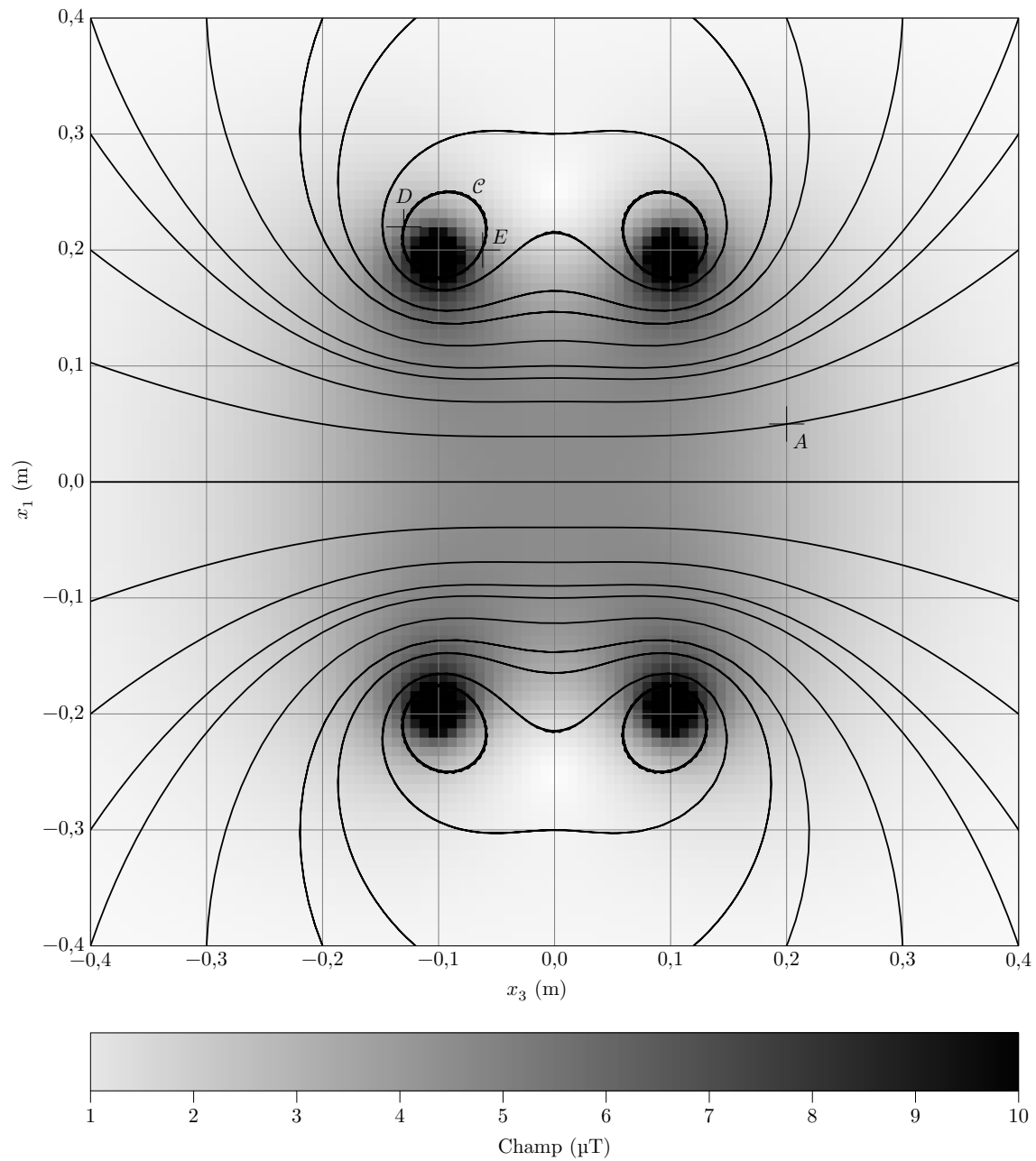
$$\operatorname{div} \vec{A}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta \psi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

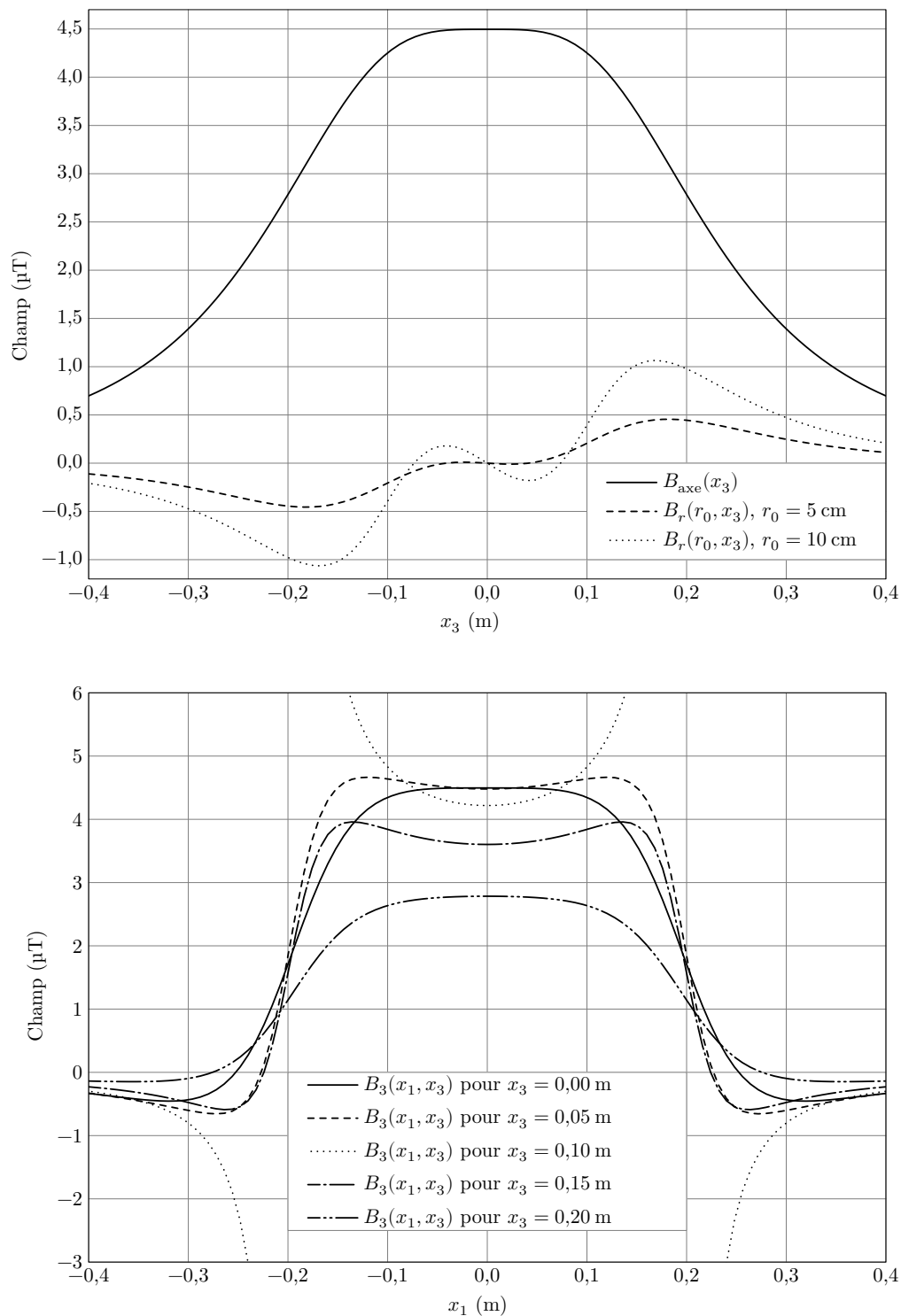
$$\operatorname{rot} \vec{A}(r, \theta, z) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$



## Documents réponse à rendre avec la copie



**Fig. 3** – Carte de champ créé par des bobines de Helmholtz, dans le plan  $\{O_1, \vec{u}_3, \vec{u}_1\}$



**Fig. 4** – Profils du champ magnétique de long de certains segments. Sur le premier graphique,  $r$  est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la cote  $x_3$ . Sur le second graphique,  $x_3$  est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la coordonnée  $x_1$ .